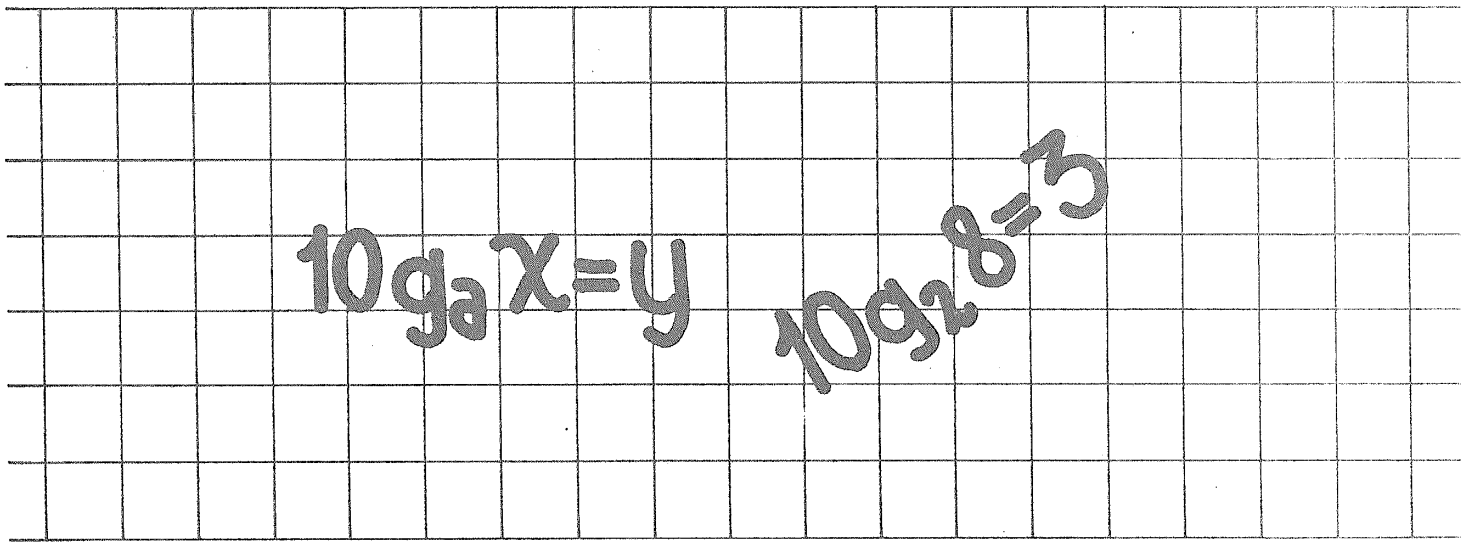
FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Obras que integran el bloque 2 *(Álgebra. Modelos)*

1. La ecuación como modelo matemático
2. Ecuaciones de primer grado
3. Sistemas de ecuaciones de primer grado
4. Desigualdades de primer grado
5. Ecuaciones de segundo grado
6. Desigualdades de segundo grado
7. La relación como modelo matemático
8. Funciones
9. Funciones exponenciales
10. ***Funciones logarítmicas***
11. Ecuaciones, desigualdades y sistemas. Soluciones gráficas
12. Resolución de problemas

ANUIES

Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



Módulos de matemáticas

Bloque 2

Àlgebra. Modelos

Módulo 10

FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Conrado Flores García

EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia,
España, Puerto Rico, Venezuela

Revisión técnica: *Myriam P. Acuña Monsalve*
Licenciada en economía,
Universidad Nacional
Autónoma de México

La presentación y disposición en conjunto de
FUNCIONES LOGARÍTMICAS
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación, o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1985, Editorial Trillas, S. A. de C. V.
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, mayo 1985
ISBN 968-24-1524-1

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo , el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquellos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

10.1 Los logaritmos 9

10.2 Análisis de la función logarítmica 22

10.3 Logaritmos decimales 35

10.4 Antilogaritmos 60

10.5 Propiedades de los logaritmos (deducción) 75

10.6 Propiedades de los logaritmos (aplicación) 87

10.7 Ecuaciones exponenciales 105

10.8 Ecuaciones logarítmicas 113

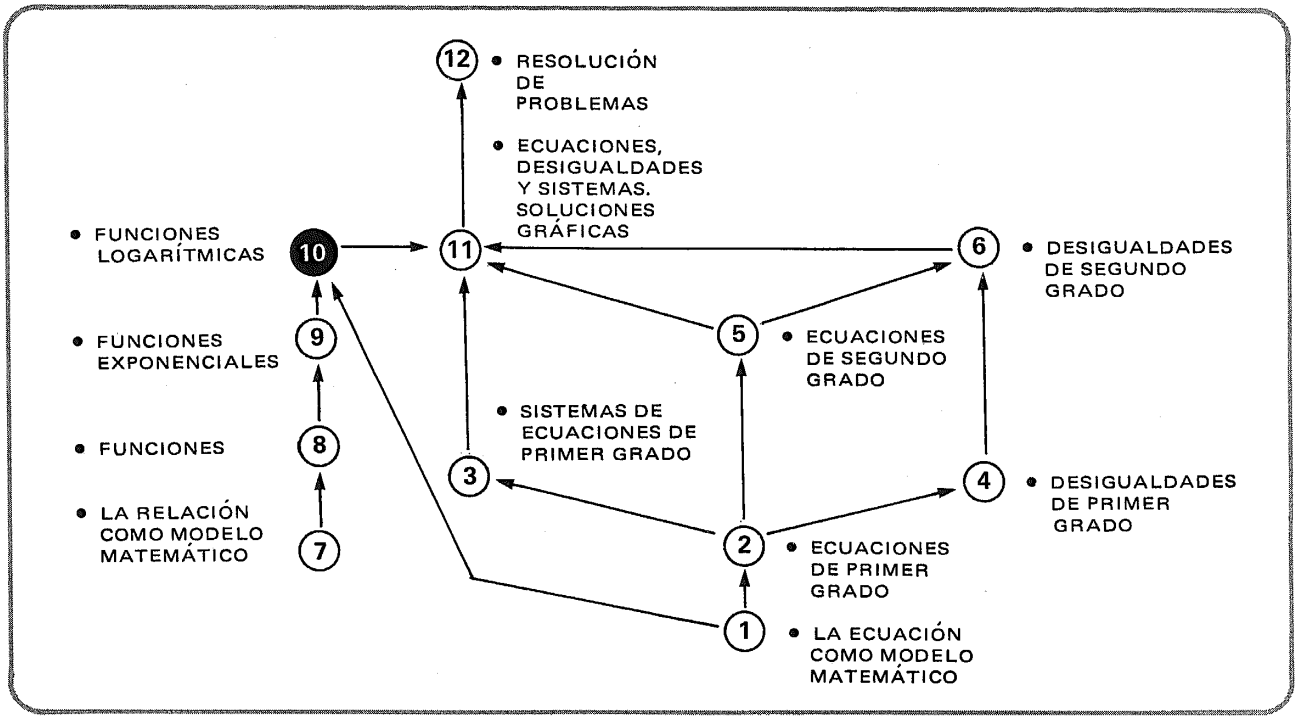
OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 2. Álgebra. Modelos

Objetivos: establecer, resolver y aplicar a situaciones reales las siguientes clases de modelos matemáticos:

– ecuaciones y desigualdades (lineales o cuadráticas)
– sistemas de ecuaciones o desigualdades
– relaciones y funciones

Esquema estructural del bloque 2



Módulo 10. Funciones logarítmicas

Objetivos: caracterizar la función logarítmica, deducir las propiedades de los logaritmos y aplicarlas en operaciones de multiplicación, división, potenciación o radicación, así como en la solución de ecuaciones exponenciales o logarítmicas sencillas

Prerrequisitos:	Bloque	Módulo(s)
• Nociones de la teoría de conjuntos	1	1
• Concepto de relación	2	7
• Concepto de función	2	8
• Concepto de función exponencial	2	9
• Resolución de ecuaciones de primer grado	2	2

10.1

Los logaritmos

1

Al estudiar las funciones exponenciales dejamos planteado un problema, cuya solución daremos en este módulo.

2

En la expresión

$$\boxed{x = a^y}$$

se requiere **despejar** y,

es decir:

$$y = ?$$

3

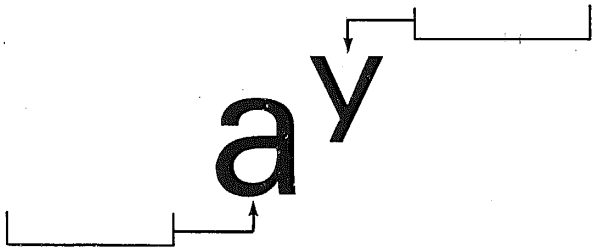
Podemos expresar el resultado de manera general, en esta forma:

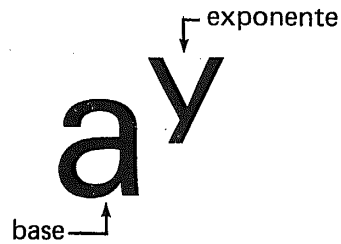
$$y = f(x)$$

4

Ahora bien, a una expresión como ésta → a^y

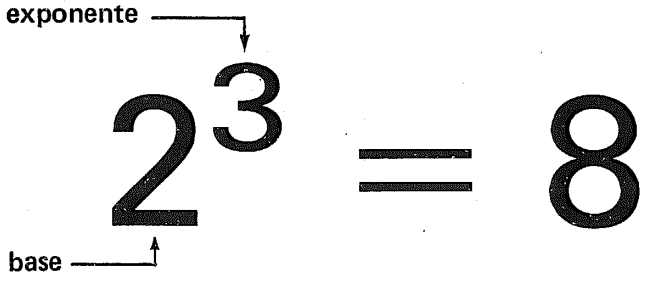
le hemos llamado **expresión exponencial,** y a sus elementos les hemos dado los siguientes nombres:





5

Por ejemplo:



$$2^3 = 8$$

6

$2^3 = 8$

Pongamos las cosas de esta manera:

el **exponente** de que es necesario
afectar la **base** 2 para obtener
como resultado 8
es igual a ⌊___⌋

3

7

- $2^3 = 8$

Intentemos escribir de manera más
compacta la proposición anterior:

- $\text{exponente}_2\ 8 = 3$

8

- $2^3 = 8$
- $\text{exponente}_2\ 8 = 3$

Asignémosle otro nombre:

- $\text{logaritmo}_2\ 8 = 3$

9

- $2^3 = 8$
- $\text{logaritmo}_2\ 8 = 3$

Ahora escribamos la expresión en forma todavía más compacta:

- $\log_2\ 8 = 3$

Leemos:

"El logaritmo en base 2 de 8 es igual a 3"

10

Otro ejemplo.

$2^4 = 16$

$\log_2\ 16 =$ ____

Se lee: _____

4

"El logaritmo en base 2 de 16 es igual a 4."

11

$2^5 = 32$

$\log_2\ 32 =$ ____

Se lee: _____

5

"El logaritmo en base 2 de 32 es igual a 5."

Recordemos que: logaritmo es el exponente. . .

12

$3^2 = 9$

$\log_3 9 = \square$

Se lee: _____

2

"El logaritmo en base 3 de 9 es igual a 2."

13

$4^3 = 64$

$\log_{\square} 64 = 3$

Se lee: _____

$\log_4 64 = 3$

"El logaritmo en base 4 de 64 es igual a 3."

14

$5^\circ = 1$

$\log_5 \square = 0$

Se lee: _____

$\log_5 1 = 0$

"El logaritmo en base 5 de 1 es igual a cero."

15

$3^{-1} = \frac{1}{3}$

$\log_3 \frac{1}{3} = \square$

Se lee: ____

-1

"El logaritmo en base 3 de 1/3 es igual a -1."

No olvidemos que: logaritmo es el exponente. . .

16

$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

$\log_2 \frac{1}{4} = \square$

Se lee: ____

-2

"El logaritmo en base 2 de 1/4 es igual a -2."

17

$3^3 = 27$

$\log_{\square} 27 = \square$

Se lee: ____

$\log_3 27 = 3$

"El logaritmo en base 3 de 27 es igual a 3."

18

$5^2 = 25$

Se lee: _____

$\log_5 25 = 2$

"El logaritmo en base 5 de 25 es igual a 2."

19

$4^3 = 64$

$\log_4 64 = 3$

20

En general:

$a^y = x$

$\log_a x = y$

21

Atención.

¡Hemos resuelto nuestro problema!

De la expresión → $x = a^y$
hemos logrado **despejar y.**

Para ello hemos tenido
que **inventar** un nuevo
tipo de números:

los logaritmos

$y = \log_a x$

22

Definición:

"El **logaritmo en base a de un número (x)** es el **exponente (y)** de que hay que afectar la base (a) para obtener como resultado el número (x)."

$a^y = x$

$\log_a x = y$

23

Ahora bien.

$\log_2 32 = 5$

En forma
exponencial: $\square = \square$ → V/F

- $2^5 = 32$
- V

24

$\log_4 16 = 2$

En forma exponencial: ⌊ ⌋ → V/F

- $4^2 = 16$
- V

25

$\log_5 25 = 3$

En forma exponencial: ⌊ ⌋ → V/F

- $5^3 = 25$
- F

26

$\log_4 \frac{1}{4} = -1$

En forma exponencial: ⌊ ⌋ → V/F

- $4^{-1} = \frac{1}{4}$
- V

27

$\log_5 \frac{1}{25} = -2$

En forma exponencial: ⌊ ⌋ → V/F

- $5^{-2} = \frac{1}{25}$
- V

28

$\log_7 7 = 0$

En forma exponencial: ⌊ ⌋ → (V/F)

- $7^0 = 7$
- F

29

$\log_7 7 =$ ⌊ ⌋

1

30

$\log_3 9 = \square$

Puesto que $\square$
en forma exponencial

2

$3^2 = 9$

31

$\log_2 \frac{1}{8} = \square$

Puesto que $\square$
en forma exponencial

-3

$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

32

$\log_3 \square = 4$

Puesto que $\square$
en forma exponencial

81

$3^4 = 81$

33

$\log_5 \square = 3$

Puesto que $\square$
en forma exponencial

125

$5^3 = 125$

34

$\log_{\square} 16 = 4$

Puesto que $\square$
en forma exponencial

2

$2^4 = 16$

35

$\log_{\square} 27 = 3$

Puesto que $\square$
en forma exponencial

3

$3^3 = 27$

2.10.1.1.

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

2.10.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *expresar* en forma logarítmica una proposición dada en forma exponencial;
- *expresar* en forma exponencial una proposición dada en forma logarítmica;
- *definir* el logaritmo en base a de un número real positivo;
- *determinar* si una proposición dada en forma logarítmica es verdadera o falsa, a partir de la proposición exponencial equivalente.

10.2

Análisis de la función logarítmica

36

Tracemos la **gráfica cartesiana** de la función **exponencial**

$\{(x, y)/(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \wedge \mathbf{y = 2^x}\}$

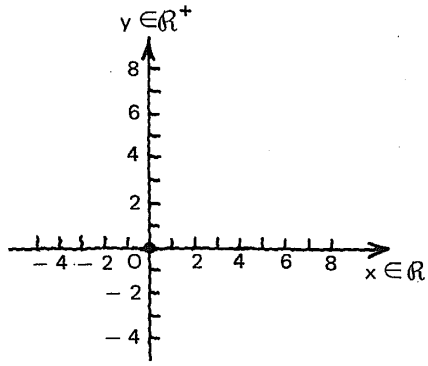
completando primero esta tabla.

x	$y = 2^x$
− 3	
− 2	
− 1	
0	
1	
2	
3	

x	$y = 2^x$
− 3	1/8
− 2	1/4
− 1	1/2
0	1
1	2
2	4
3	8

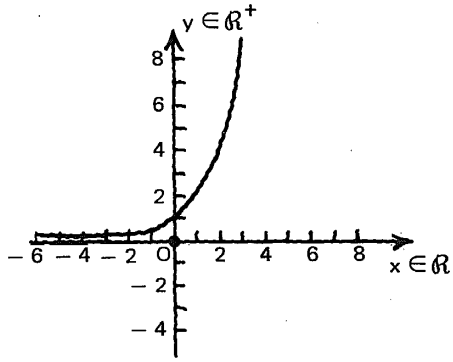
37

Completar ahora la gráfica cartesiana.



Respuesta en el cuadro siguiente

Gráfica cartesiana de la función exponencial $y = 2^x$.



38

x	y
– 3	1/8
– 2	1/4
– 1	1/2
0	1
1	2
2	4
3	8

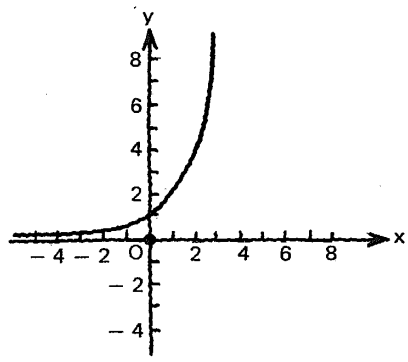
Ahora, intercambiemos los componentes x e y en la tabla.

x	y

x	y
1/8	– 3
1/4	– 2
1/2	– 1
1	0
2	1
4	2
8	3

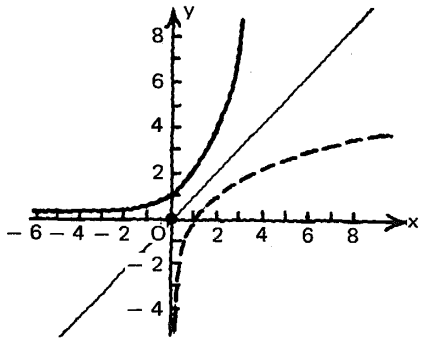
39

Tracemos la gráfica correspondiente a esta nueva tabla, en el mismo sistema cartesiano



Respuesta en el cuadro siguiente

Observemos que la gráfica resultante (la de trazo punteado) corresponde a la **inversa** de la función dada (la de trazo continuo).



40

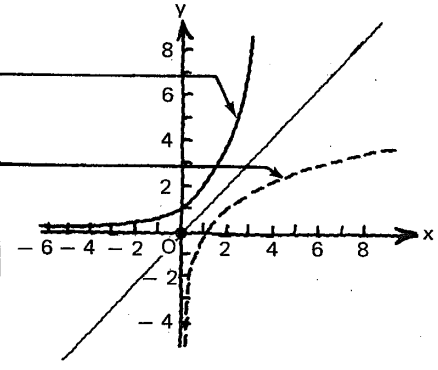
Observar con atención.

$\{(x, y)/(x, y) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}^+ \wedge \mathbf{y = 2^x}\}$

$\{(x, y)/(x, y) \in \mathcal{R}^+ \times \mathcal{R} \wedge \mathbf{x = 2^y}\}$

o bien:

$\{(x, y)/(x, y) \in \mathcal{R}^+ \times \mathcal{R} \wedge \mathbf{y = \log_2 x}\}$



41

Ésta es entonces la gráfica cartesiana de la función

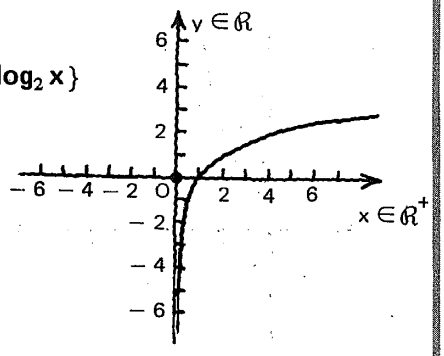
$\{(x, y)/(x, y) \in \mathcal{R}^+ \times \mathcal{R} \wedge \mathbf{y = \log_2 x}\}$

Por ejemplo:

$\log_2 1 =$ ⌊___⌋

En efecto:

⌊_____⌋
expresión exponencial equivalente



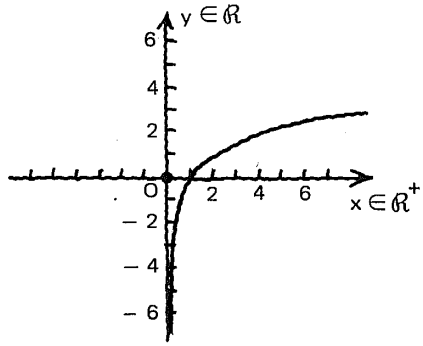
0

$2^0 = 1$

42

$\log_2 4 = \square$

En efecto:



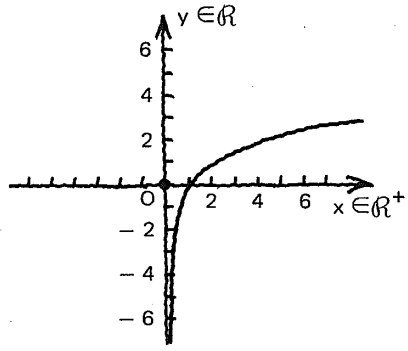
2

$2^2 = 4$

43

$\log_2 \frac{1}{2} = \square$

En efecto:



– 1

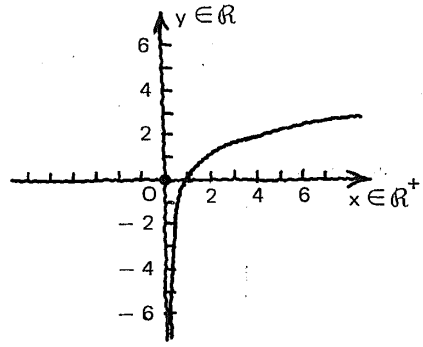
$2^{-1} = \frac{1}{2}$

44

Atención.

$\log_2 0 = \square$

En efecto:



número no definido

$2^? = 0$

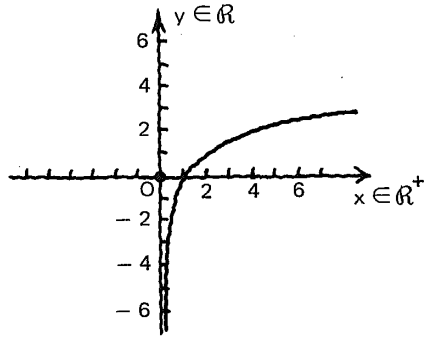
45

Podemos simbolizar esto así:

$\log_2 0 = -\infty$

teniendo en cuenta que

$-\infty$ **no es un número.**



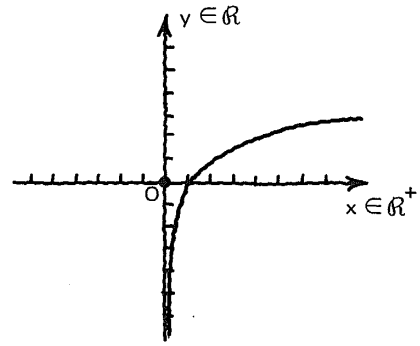
46

La gráfica cartesiana correspondiente a

$\{(x, y)/(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \wedge y = \log_a x\}$

tiene este aspecto ➡
para

$a > 1$



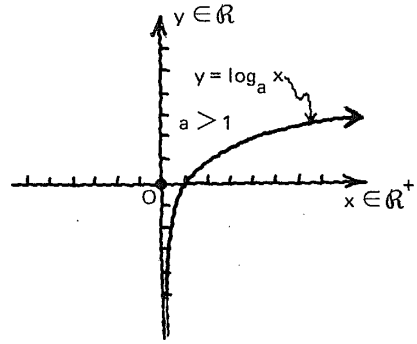
47

Observamos que:

Si $x \to +\infty$, $\log_a x$ ⌊___⌋

Si $x \to 0$, $\log_a x$ ⌊___⌋

Si $x \leqslant 0$, ⌊_____⌋



$+\infty$

$-\infty$

$\log_a x$ no está definido

48

Para a > 1

no

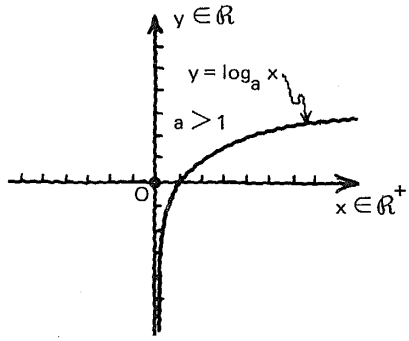
se definen los logaritmos de cero ni de números negativos.

49

Señalar la opción correcta.

La función representada por esta gráfica es

creciente/decreciente



creciente

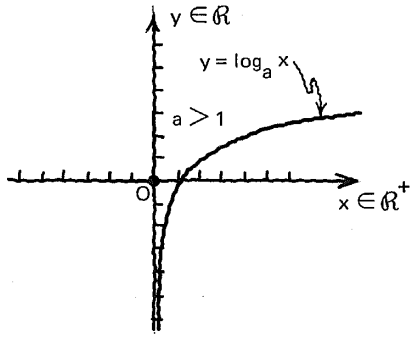
50

Para a > 1, si

x aumenta
$\log_a$ x aumenta.

51

El **dominio** de la función representada es



Su **rango** es

$\mathbb{R}^+$

$\mathbb{R}$

52

El **logaritmo** en base a $(a > 1)$ de un número real positivo es

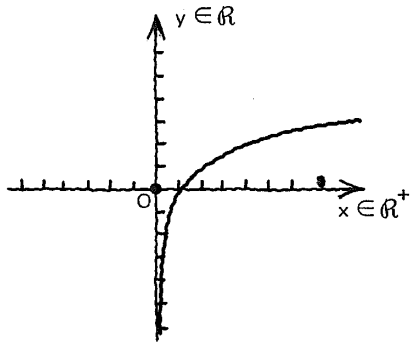
- un número **real positivo, negativo o nulo.**

53

Señalar la opción correcta.

La función representada es:

- suprayectiva
- biyectiva



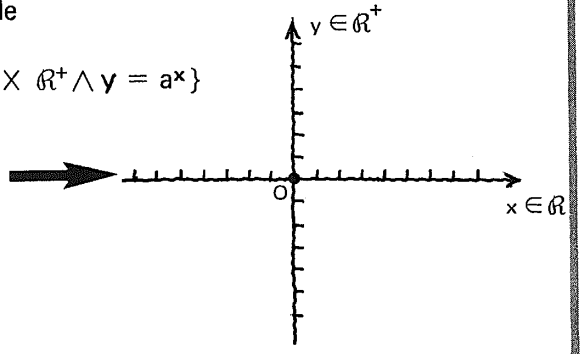
biyectiva

54

Recordemos que la gráfica cartesiana de

$\{(x, y)/(x, y) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}^+ \wedge y = a^x\}$

para $0 < a < 1$
tiene este aspecto



Completar.

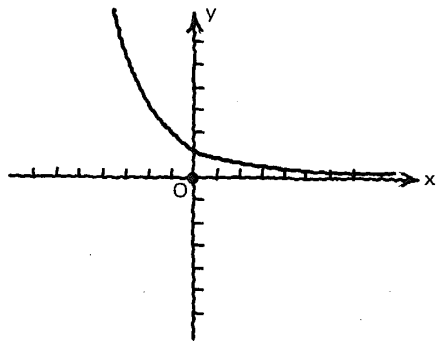
Respuesta en el cuadro siguiente

55

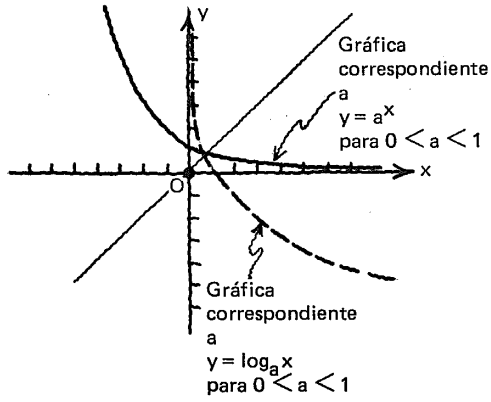
Trazar la gráfica de la

inversa

de la función representada.



Respuesta en el cuadro siguiente



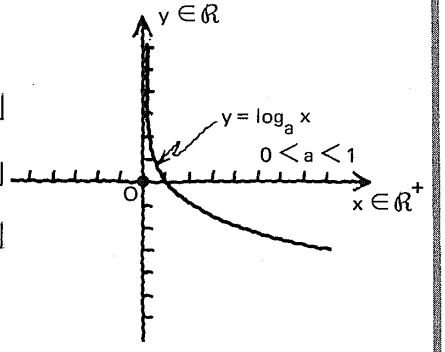
56

Observamos que:

Si $x \to +\infty$, $\log_a x \to$ [ ]

Si $x \to 0$, $\log_a x \to$ [ ]

Si $x \leqslant 0$, [ ]



$-\infty$

$+\infty$

el logaritmo en base a de x no está definido

57

Para $0 < a < 1$

tampoco

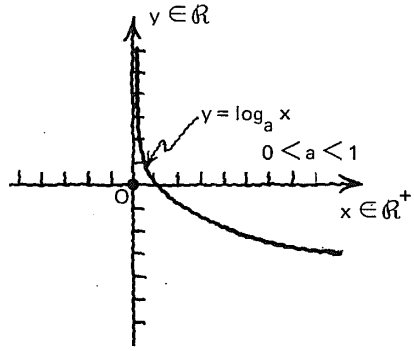
se definen los logaritmos de cero ni de números negativos.

58

Señalar la opción correcta.

La función representada es

creciente/decreciente



decreciente

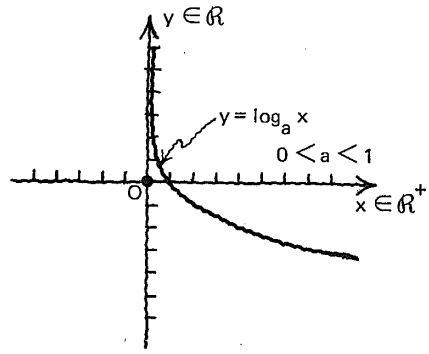
59

Para $0 < a < 1$,

si **x aumenta**
$\log_a x$ disminuye.

60

El **dominio** de la función representada es



$\mathbb{R}^+$

Su **rango** es:

$\mathbb{R}$

61

El **logaritmo** en base a $(0 < a < 1)$ de un número real positivo es

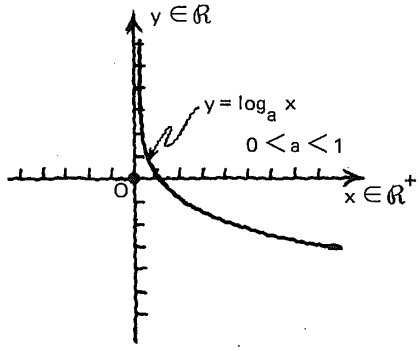
- un número **real positivo, negativo o nulo.**

62

Señalar la opción correcta.

La función representada es:

- suprayectiva ⌊___⌋
- biyectiva ⌊___⌋



biyectiva

63

Señalar la opción correcta.

Recordemos que

cuando a = 1 la expresión

$$\{(x, y)/(x, y) \in \Re \times \Re^+ \wedge y = a^x\}$$

representa/no representa

una **función exponencial.**

no representa

64

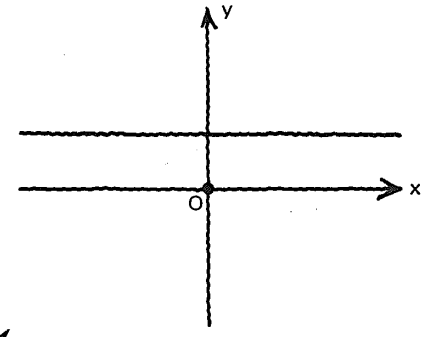
La función definida por

$$y = 1^x$$

es una

función constante

cuya gráfica cartesiana tiene este aspecto



65

Señalar la opción correcta.

Para a = 1

la expresión

$$\{(x, y)/(x, y) \in \mathcal{R}^+ \times \mathcal{R} \wedge y = \log_a x\}$$

representa/no representa

una función **logarítmica.**

no representa

66

La expresión

$$y = \log_1 x$$

carece de sentido.

Por ejemplo:

$$\log_1 2 = \text{número no definido}$$

puesto que no hay ningún número que aplicado como exponente a la base 1 dé 2 como resultado:

$$1^? = 2$$

67

No olvidemos, entonces, que en la expresión

$$y = a^x$$

hemos limitado el conjunto de sustitutos permisibles para la base a al de los números

reales positivos diferentes de 1.

68

Por lo tanto,
asignaremos un significado
a la expresión

$$y = \log_a x$$

únicamente para:

$$a > 0$$

y

$$a \neq 1$$

69

En conclusión:

la expresión

$$\{(x, y)/(x, y) \in \mathcal{R}^+ \times \mathcal{R} \wedge y = \log_a x\}$$

representa una **función logarítmica**

sólo si

$$a \in \mathcal{R}^+ \wedge a \neq 1.$$

2.10.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *efectuar* el análisis de la función logarítmica representada por:

  $\{(x, y)/(x, y) \in \mathcal{R}^+ \times \mathcal{R} \wedge y = \log_a x\}$

  para $a > 1$ y para $0 < a < 1$, determinando:

  - su dominio,
  - su rango,
  - si es creciente o decreciente,
  - si es suprayectiva o biyectiva.

10.3

Logaritmos decimales

70

$2^1 = 2$

En forma logarítmica ⌊ ⌋

$\log_2 2 = 1$

71

En forma logarítmica:

$3^1 = 3$ ⌊ ⌋ $\log_3 3 = 1$

$4^1 = 4$ ⌊ ⌋ $\log_4 4 = 1$

$5^1 = 5$ ⌊ ⌋ $\log_5 5 = 1$

$6^1 = 6$ ⌊ ⌋ $\log_6 6 = 1$

$7^1 = 7$ ⌊ ⌋ $\log_7 7 = 1$

$8^1 = 8$ ⌊ ⌋ $\log_8 8 = 1$

72

En general:

$\log_a a = 1$

73

$\log_a a = 1$

$\forall\, a \in \mathbb{R}^+ \wedge a \neq 1$

El logaritmo de la base es igual a 1.

74

$\log_2 1 =$ [ ]

Puesto que:

$2^0 = 1$

expresión exponencial equivalente

0

75

Expresión exponencial equivalente: ⟶

$\log_3 1 =$ ___ puesto que ___

$\log_4 1 =$ ___ puesto que ___

$\log_5 1 =$ ___ puesto que ___

$\log_6 1 =$ ___ puesto que ___

$\log_7 1 =$ ___ puesto que ___

$\log_8 1 =$ ___ puesto que ___

$\log_3 1 = 0$ $3^0 = 1$

$\log_4 1 = 0$ $4^0 = 1$

$\log_5 1 = 0$ $5^0 = 1$

$\log_6 1 = 0$ $6^0 = 1$

$\log_7 1 = 0$ $7^0 = 1$

$\log_8 1 = 0$ $8^0 = 1$

76

En general:

___

___

$\log_a 1 = 0$

$\forall a \in \mathbb{R}^+ \wedge a \neq 1$

77

$\boxed{\log_a 1 = 0}$

$\forall a \in \mathbb{R}^+ \wedge a \neq 1$

Para cualquier base
el logaritmo de 1
es igual a cero.

78

Ensayemos como

base

el número 10.

79

$10^{1} = 10$

$\log 10 = \square$

El símbolo **log** significará: "logaritmo en base 10, logaritmo decimal, o logaritmo común".

1

80

$10^{2} = 100$

$\log 100 = \square$

2

81

$10^3 = 1000$

$\downarrow$

$\log 1000 = \square$

3

82

$\log 10 = 1$

$\log 100 = 2$

$\log 1\,000 = 3$

$\log 10\,000 = \square$

$\log 100\,000 = \square$

$\log 1\,000\,000 = \square$

$\downarrow$

etcétera

4

5

6

83

$\log 10 = 1$
$\log 100 = 2$
$\log 1\,000 = 3$
$\log 10\,000 = 4$
$\log 100\,000 = 5$
$\log 1\,000\,000 = 6$

Observemos la correspondencia entre el número de ceros del numeral y el logaritmo.

84

Por ejemplo:

log 100 000 000 = ⌊___⌋

8

85

log 10 = ⌊___⌋

1

(el logaritmo de la base
es igual a 1)

86

log 1 = ⌊___⌋

0
puesto que
$10^0 = 1$

(para cualquier base
el logaritmo de 1
es igual a cero)

87

$10^{-1} = \square$

$\frac{1}{10} = 0.1$

88

$\log 0.1 = \square$

-1

89

$\log 0.01 = \square$

-2

$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0.01$

90

$\log 0.001 = \boxed{\quad}$

-3

$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0.001$

91

$\log 0.1 = -1$
$\log 0.01 = -2$
$\log 0.001 = -3$

Observemos la correspondencia entre el número de orden de la cifra significativa después del punto decimal y el logaritmo.

92

$\log 0.0001 = \boxed{\quad}$

-4

93

log 0.00001 = ⌊____⌋

– 5

94

Observar con atención.

log 0.001 = – 3
log 0.01 = – 2
log 0.1 = – 1
log 1 = 0
log 10 = 1
log 100 = 2
log 1000 = 3

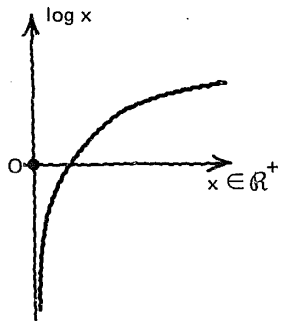
95

Sabemos que

log 1 = 0
log 10 = 1

Ahora bien, el logaritmo en base 10 de **un número comprendido entre 1 y 10**, por ejemplo 2, deberá ser un **número comprendido entre**

⌊____⌋ y ⌊____⌋



0 1

96

Señalar la opción correcta.

log 2 es un número entero.

V/F

F

Entre 0 y 1 no hay más números enteros.

97

Atención.

log 1 = 0

log 2 = 0 + **una cierta fracción decimal**

log 10 = 1

98

log 10 = 1

log 35 = ____

log 100 = 2

1 + una cierta fracción decimal

99

log 100 = 2

log 475 = [ ]

log 1000 = 3

2 + una cierta fracción decimal

100

En general:

- log x = [un cierto número **entero**] + [una cierta **fracción** decimal]

101

Ahora, asignemos nombres:

- log x = [un cierto número **entero**] + [una cierta **fracción** decimal]

característica → un cierto número **entero**

mantisa → una cierta **fracción** decimal

102

Determinación de la **característica.**

103

Sabemos que

$$\log 1 = 0$$

y

$$\log 10 = 1$$

entonces,
el logaritmo de un número
comprendido entre 1 y 10*
estará comprendido entre 0 y 1.
Simbólicamente:

- $\log x = 0 + \text{mantisa}$ para $1 \leqslant x < 10$

* La representación de un número comprendido entre 1 y 10 tiene **una cifra entera**

104

Sabiendo que

$$\log 10 = 1$$

y

$$\log 100 = 2$$

podemos afirmar que:
el logaritmo de un número
comprendido entre 10 y 100*
estará comprendido entre ⌊⌋ y ⌊⌋
Simbólicamente:

- $\log x =$ ⌊_____⌋ para $10 \leqslant x < 100$

* El numeral que lo representa tiene ⌊⌋ cifras enteras.

1 2

1 + mantisa

dos

105

Además,
puesto que

$$\log 100 = 2$$

y

$$\log 1000 = 3$$

afirmamos que:

[ ]

Simbólicamente:

[ ]

el logaritmo de un número comprendido entre 100 y 1000* estará comprendido entre 2 y 3.

$\log x = 2 +$ mantisa
para $100 \leqslant x < 1000$
* El numeral tiene **tres cifras enteras**

106

Estudiar con atención este resumen de lo que hemos encontrado.

Número de cifras enteras en la representación de X. — **Característica**

	• $\log 1 = 0$	
1 ←	$1 \leqslant x < 10$	• $\log x = 0 +$ mantisa
	• $\log 10 = 1$	
2 ←	$10 \leqslant x < 100$	• $\log x = 1 +$ mantisa
	• $\log 100 = 2$	
3 ←	$100 \leqslant x < 1000$	• $\log x = 2 +$ mantisa
	• $\log 1000 = 3$	

107

$$\log N = C + M$$

Regla 1 para la determinación de la **característica (C)**

Si

$N \geqslant 1$ y n representa el número de cifras enteras del numeral correspondiente a N:

$$\boxed{C = n - 1}$$

108

Por ejemplo:

log 35 = ⌊ ⌋ + mantisa

característica

1

109

log 378 = ⌊ ⌋ + mantisa

característica

2

110

log 9.8 = ⌊ ⌋ + mantisa

característica

0

111

log 27.895 = ⌊ ⌋ + mantisa

característica

1

2.10.3.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

112

Hemos encontrado también que:

log 1 = 0
log 0.1 = – 1
log 0.01 = – 2
log 0.001 = – 3

113

Estudiar con atención.

Número de orden de la primera cifra significativa en la representación de x.

característica

- log 1 = 0

1 ← $0.1 \leqslant x < 1$ • $\log x = -1 +$ mantisa

- log 0.1 = − 1

2 ← $0.01 \leqslant x < 0.1$ • $\log x = -2 +$ mantisa

- log 0.01 = − 2

3 ← $0.001 \leqslant x < 0.01$ • $\log x = -3 +$ mantisa

- log 0.001 = − 3

114

$$\log N = C + M$$

Regla 2 para la determinación de la **característica (C)**:

Si

$0 < N < 1$ y m representa el número de orden de la primera cifra significativa después del punto decimal, en la representación de N:

$$C = -m$$

115

Ejemplo:

$$\log 0.03 = \boxed{\quad} + \text{mantisa}$$

característica

− 2

116

log 0.00014 = ⌊ ⌋ + mantisa

característica

− 4

117

log 0.0075 = ⌊ ⌋ + mantisa

característica

− 3

118

log 0.75 = ⌊ ⌋ + mantisa

característica

− 1

119

Atención.

log 1.08 = ⌊ ⌋ + mantisa

característica

0

puesto que:
$N \geqslant 1$

2.10.3.2

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

120

Sabemos que:

log 827.5 = ⌊ ⌋ + mantisa

2

121

log 47.78 = ⌊ ⌋ + mantisa

1

122

log 0.78 = ⌊ ⌋ + mantisa

− 1

123

log 0.0085 = ⌊ ⌋ + mantisa

− 3

124

En general:

$$\log N = C + M$$

- característica
- mantisa

Las **mantisas** se encuentran en tablas, en las que se indica su manejo.
Las llamadas **tablas de logaritmos decimales** son, en realidad, **tablas de mantisas.**

125

Así encontramos, por ejemplo, que:

$$\log 827.5 = 2 + \text{mantisa}$$

0.9178

126

Atención.

$$\log 827.5 \doteq 2 + 0.9178$$

Esto lo podemos escribir así:

$$\log 827.5 \doteq 2.9178$$

Utilizamos el signo $\doteq$ con el significado de "es aproximadamente igual a".

127

mantisa

$\log 47.78 = 1 + \square$

$= \square$

0.6792

1.6792

128

mantisa

$\log 0.78 = -1 + \square$

0.8921

129

Atención.

$\log 0.78 = -1 + 0.8921$

Esto lo podemos escribir así:

$\log 0.78 = 1.8921$

o así:

$\log 0.78 = 9.8921 - 10$

o así:

$\log 0.78 = -0.1079$

130

mantisa ↓

$\log 0.0085 \doteq -3 + \square$

$\doteq \square$

$\doteq \square$

0.9294

3.9294

− 2.0706

131

Podemos observar que,
en las tablas,
las mantisas de números
tales como:

0.0085
0.085
0.85
8.5
85.
850.

etcétera,
son iguales.

132

$\log 49.75 \doteq \square$

1.6968

133

$\log 750.2 \doteq$ _____

2.8752

134

$\log 0.785 \doteq$ _____

$\doteq$ _____

$\doteq$ _____

$-1 + 0.8949$

$\bar{1}.8949$

-0.1051

135

$\log 0.0075 \doteq$ _____

$\doteq$ _____

$\doteq$ _____

$-3 + 0.8751$

$\bar{3}.8751$

-2.1249

136

$\log 2 \doteq$ _____

0.3010

137

No olvidemos que

$$\log 2 = 0.3010$$

y

$$10^{0.3010} = 2$$

son dos maneras
de decir la misma cosa.

2.10.3.3

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

2.10.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar* el logaritmo decimal de un número real positivo dado, con la ayuda de una tabla de mantisas o de una calculadora.

10.4

Antilogaritmos

138

Consideremos estas
dos expresiones equivalentes:

- $\log 2 = 0.3010$
- $10^{0.3010} = 2$

139

Atención.

$\log 2 = 0.3010$

$10^{0.3010} = 2$

Hay una tercera manera
de expresar lo mismo:

$\boxed{\text{antilog } 0.3010 = 2}$

y se lee: "el antilogaritmo decimal
de 0.3010 es igual a 2".

140

1. $\log 827.5 \doteq 2.9178$
2. $10^{2.9178} \doteq 827.5$
3. _____

antilog $2.9178 \doteq 827.5$

141

1. $\log 375 \doteq 2.5740$
2. $10^{2.5740} \doteq 375$
3. _____

antilog $2.5740 \doteq 375$

142

1. $\log 0.03 \doteq -1.5229$
2. _____
3. _____

$10^{-1.5229} = 0.03$

antilog $(-1.5229) = 0.03$

143

En general:

1. $\log x = y$
2. [ ]
3. [ ]

$10^y = x$

antilog $y = x$

144

$\log x = y$

$10^y = x$

antilog $y = x$

Observemos también que:

$\boxed{\text{antilog } y = 10^y}$

145

El **antilogaritmo decimal** de un número x puede determinarse por medio de **tablas** o de **calculadoras electrónicas.**

$\boxed{\text{antilog } x} \rightarrow \boxed{10^x}$

146

Por lo general, las calculadoras dan directamente el antilogaritmo del número expuesto, al presionar la tecla 10^x.
Por ejemplo:

antilog 2.8752 ≐

$10^{2.8752}$

750.2396276

147

característica

antilog $\overline{2}.8752$ ≐ 750.24

mantisa

Debemos observar que **el número de cifras enteras** (n) **del antilogaritmo decimal** es igual a la **característica más uno** (si la característica es positiva o cero):

$$C \geqslant 0 \Rightarrow n = C + 1$$

148

En las tablas de **antilogaritmos** generalmente usadas se entra con la **mantisa** y se obtiene un **conjunto de dígitos** en el que es preciso señalar, de acuerdo con la **característica,** el lugar correspondiente al **punto decimal** para obtener el antilogaritmo buscado.

149

Por ejemplo, se requiere determinar → antilog 2.8752

Entramos con → .8752

Obtenemos → 7502

La característica → 2

nos indica que debemos colocar el **punto decimal** en este lugar

750.2

150

Del mismo modo,
realicemos los ejercicios siguientes.

antilog 1.8745 = _____

antilog 1.8745 = 74.91

151

antilog 0.3010 = _____

antilog 0.3010 ≐ 2.000

152

antilog 3.1248 = ____

antilog 3.1248 ≐ 1332

153

antilog 5.2775 = ____

Atención.

antilog 1.8745 ≐ 74.91

2.10.4.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

154

Ahora bien:

$\log 0.061 =$ [ ]

$\log 0.061 \doteq \bar{2}.7853$

155

$\text{antilog } \bar{2}.7853 \doteq 0.061$

Observemos que la característica 2 nos indica que la primera cifra significativa del antilogaritmo ocupa el segundo lugar después del punto decimal.

156

Teniendo en cuenta lo anterior, realicemos estos ejercicios.

$\text{antilog } \bar{1}.5064 =$ [ ]

$\text{antilog } \bar{1}.5064 \doteq 0.3209$

157

antilog $\bar{3}.3010 =$ _____

antilog 3.3010 ≐ 0.002

158

antilog 4.8706 = _____

antilog 4.8706 ≐ 0.0007423

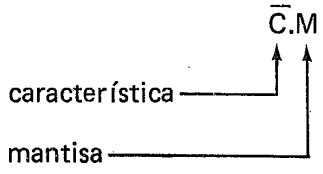
159

Ahora se requiere determinar

antilog − 2.1784

utilizando una tabla de antilogaritmos.

Como primer paso debemos expresar el número − 2.1784 en la forma



160

Queremos expresar:

-2.1784

en la forma:

$\bar{C}.M$

En el cuadro siguiente se nos enseña cómo podemos hacerlo.

161

Estudiar con atención.

-2.1784

equivale a

$-(2+0.1784)$

o bien, a

$-2-0.1784$

De modo que:

$-2-0.1784+1-1$

reagrupando

$(-2-1)+(1-0.1784)$

$-3+0.8216$

$\bar{3}.8216$

Si sumamos y restamos 1 a esta última expresión, no se altera su valor.

162

Así, expresamos los siguientes números en la forma $\bar{C}.M.$

$-1.2601 =$ _____

$\bar{2}.7399$

163

$-\ 3.0492 = \square$

$\bar{4}.9508$

164

$-\ 0.6543 = \square$

$\bar{1}.3457$

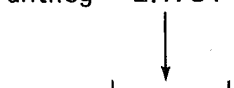
2.10.4.2

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

165

Entonces:

antilog -2.1784

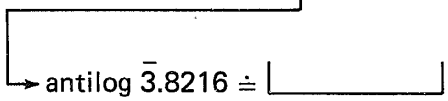


antilog ⌊ ⌋

$\bar{3}.8216$

166

antilog -2.1784 = ⌊ ⌋

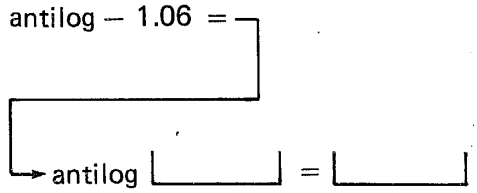


antilog $\bar{3}.8216 \doteq$ ⌊ ⌋

0.006631

167

antilog -1.06 = ⌊ ⌋



antilog ⌊ ⌋ = ⌊ ⌋

antilog $\bar{2}.94 \doteq 0.0871$

168

antilog − 0.884 = ⌐

antilog ⌊ ⌋ = ⌊ ⌋

antilog $\bar{1}.116 \doteq 0.1306$

2.10.4.3

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

169

$$y = \log_a x$$

Además del número 10,
otra base
frecuentemente usada
es el número irracional

$$e = 2.71828...$$

el cual definiremos más adelante.

170

A los **logaritmos de base e**
se les llama

logaritmos naturales o neperianos

y los representaremos
con el símbolo:

ln

171

Los **logaritmos naturales**
también pueden ser
determinados
por medio de tablas
o calculadoras.

172

Por ejemplo:

$\ln 27 =$ _____

$\ln 27 \doteq 3{,}2958$

173

$\ln 27 = 3.2958\ldots$

(expresión exponencial equivalente)

$e^{3.2958\ldots} = 27$

174

$\ln 0.045 =$ _____

$\ln 0.045 \doteq -3.1011$

175

Hemos encontrado que:

$\text{antilog } x = 10^x$

De manera similar:

$\text{antiln } x =$ ____

e^x

176

antiln 4.285 = [ ]

antiln 4.285 ≐ 72.6025

2.10.4.4

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

2.10.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar* el antilogaritmo decimal de un número real no negativo dado;
- *determinar* el antilogaritmo decimal de un número real negativo dado;
- *determinar* el antilogaritmo natural de un número real dado.

10.5

Propiedades de los logaritmos (deducción)

177

En los cuadros siguientes deduciremos **cuatro propiedades importantes de los logaritmos**

178

$y = \log_a n$

Expresión exponencial equivalente: $a^y = n$

179

$y = \log_a n$ ①

$a^y = n$ ②

Al sustituir **y** por su equivalente, obtenemos:

$\boxed{\qquad\qquad}$ ③

$a^{\log_a n} = n$

180

$y = \log_a n$ ①

$a^y = n$ ②

$a^{\log_a n} = n$ ③

De manera similar:

$a^{\log_a m} = \boxed{\quad}$ ④

$a^{\log_a m} = m$

181

$y = \log_a n$ ①

$a^y = n$ ②

$a^{\log_a n} = n$ ③

$a^{\log_a m} = m$ ④

De manera similar:

$a^{\log_a nm} = \boxed{\qquad\qquad}$ ⑤

$a^{\log_a nm} = nm$

182

$a^{\log_a n} = n$ ③

$a^{\log_a m} = m$ ④

$a^{\log_a nm} = nm$ ⑤

$nm = nm$ ⑥

Ahora bien.
Sustituyendo en ⑥
n, m y nm por
sus equivalentes
dados en ③ ④ y ⑤

⑦

$a^{\log_a nm} = a^{\log_a n} \cdot a^{\log_a m}$

183

$a^{\log_a nm} = a^{\log_a n} \cdot a^{\log_a m}$ ⑦

Al aplicar la propiedad:

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

al segundo miembro,
obtenemos:

⑧

$a^{\log_a nm} = a^{\log_a n + \log_a m}$

184

$a^{\log_a nm} = a^{\log_a n + \log_a m}$ ⑧

Para $a \in \mathbb{R}^+$ y $a \neq 1$,
podemos escribir,
a partir de ⑧ :

$$\log_a nm = \log_a n + \log_a m$$

185

Estudiemos con atención el procedimiento completo para la deducción de esta importante propiedad.

$$y = \log_a n \quad ①$$

$$a^y = n \quad ②$$

$$a^{\log_a n} = n \quad ③$$

$$a^{\log_a m} = m \quad ④$$

$$a^{\log_a nm} = nm \quad ⑤$$

$$nm = nm \quad ⑥$$

$$a^{\log_a nm} = a^{\log_a n} \cdot a^{\log_a m} \quad ⑦$$

$$a^{\log_a nm} = a^{\log_a n + \log_a m} \quad ⑧$$

$$\boxed{\log_a nm = \log_a n + \log_a m}$$

para $a \in \mathbb{R}^+ \wedge a \neq 1$

186

Propiedad 1

"El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores."

$$\boxed{\log_a nm = \log_a n + \log_a m}$$

para $a \in \mathbb{R}^+ \wedge a \neq 1$.

187

Ahora, tenemos

$y = \log_a n$ ①

Expresión exponencial equivalente:

[ ] ②

$a^y = n$

188

$y = \log_a n$ ①

$a^y = n$ ②

Al sustituir y en ②
por su equivalente
dado en ①, obtenemos:

$\boxed{\qquad\qquad}$ ③

$a^{\log_a n} = n$

189

$y = \log_a n$ ①

$a^y = n$ ②

$a^{\log_a n} = n$ ③

Similarmente

$a^{\log_a m} = \boxed{\quad}$ ④

m

190

$y = \log_a n$ ①

$a^y = n$ ②

$a^{\log_a n} = n$ ③

$a^{\log_a m} = m$ ④

También,
de manera similar:

$a^{\log_a n/m} = \boxed{\quad}$ ⑤

$\frac{n}{m}$

191

$y = \log_a n$ ①

$a^y = n$ ②

$a^{\log_a n} = n$ ③

$a^{\log_a m} = m$ ④

$a^{\log_a n/m} = n/m$ ⑤

Escribimos la identidad:

$$\frac{n}{m} = \frac{n}{m} \quad ⑥$$

y sustituyendo n/m, n y m por sus equivalentes dados en ③, ④ y ⑤, obtenemos:

[ ] ⑦

$$a^{\log_a n/m} = \frac{a^{\log_a n}}{a^{\log_a m}}$$

192

$$a^{\log_a n/m} = \frac{a^{\log_a n}}{a^{\log_a m}} \quad ⑦$$

Al aplicar la propiedad:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

se obtiene:

$a^{\log_a \frac{n}{m}} =$ [ ] ⑧

$a^{\log_a n - \log_a m}$

193

$a^{\log_a n/m} = a^{\log_a n - \log_a m}$ ⑧

De donde

para $a \in \mathbb{R}^+ \wedge a \neq 1$:

[ ] ⑨

$\log_a n/m = \log_a n - \log_a m$

194

El procedimiento completo.

$$y = \log_a n \quad ①$$

$$a^y = n \quad ②$$

$$a^{\log_a n} = n \quad ③$$

$$a^{\log_a m} = m \quad ④$$

$$a^{\log_a n/m} = n/m \quad ⑤$$

$$\frac{n}{m} = \frac{n}{m} \quad ⑥$$

$$a^{\log_a \frac{n}{m}} = \frac{a^{\log_a n}}{a^{\log_a m}} \quad ⑦$$

$$a^{\log_a \frac{n}{m}} = a^{\log_a n - \log_a m} \quad ⑧$$

$$\boxed{\log_a \frac{n}{m} = \log_a n - \log_a m}$$

195

Propiedad 2

"El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor".

$$\boxed{\log_a \frac{n}{m} = \log_a n - \log_a m}$$

para $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$ y $m \neq 0$.

196

Nuevamente tomamos como punto de partida:

$y = \log_a n$ ①

Expresión exponencial equivalente:

[ ] ②

$a^y = n$

197

$y = \log_a n$ ①

$a^y = n$ ②

Sustituimos y en ②
por su equivalente dado en ①,
para obtener:

$\boxed{}$ ③

$a^{\log_a n} = n$

198

$y = \log_a n$ ①

$a^y = n$ ②

$a^{\log_a n} = n$ ③

Similarmente:

$a^{\log_a n^m} = \boxed{}$ ④

n^m

199

$y = \log_a n$ ①

$a^y = n$ ②

$a^{\log_a n} = n$ ③

$a^{\log_a n^m} = n^m$ ④

Escribimos la identidad:

$n^m = n^m$ ⑤

Al sustituir en ⑤ n^m por
su equivalente dado en ④,
y n por su equivalente dado en
③, obtenemos:

$\boxed{}$ ⑥

$a^{\log_a n^m} = (a^{\log_a n})^m$

200

$y = \log_a n$ ①

$a^y = n$ ②

$a^{\log_a n} = n$ ③

$a^{\log_a n^m} = n^m$ ④

$n^m = n^m$ ⑤

$a^{\log_a n^m} = (a^{\log_a n})^m$ ⑥

Al aplicar $(a^n)^m = a^{nm}$ al segundo miembro, obtenemos:

_____ ⑦

$a^{\log_a n^m} = a^{m \log_a n}$

201

$a^{\log_a n^m} = a^{m \log_a n}$ ⑦

De donde para $a \in \mathbb{R}^+ \wedge a \neq 1$:

_____ ⑧

$\log_a n^m = m \log_a n$

202

Estudiar con atención.

$y = \log_a n$ ①

$a^y = n$ ②

$a^{\log_a n} = n$ ③

$a^{\log_a n^m} = n^m$ ④

$n^m = n^m$ ⑤

$a^{\log_a n^m} = (a^{\log_a n})^m$ ⑥

$a^{\log_a n^m} = a^{m \log_a n}$ ⑦

$\boxed{\log_a n^m = m \log_a n}$

203

Propiedad 3

"El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente y el logaritmo de la base."

$$\log_a n^m = m\log_a n$$

204

Por la propiedad 3 que acabamos de deducir:

$\log_a n^r =$ [ ]

$r\log_a n$

205

$$\log_a n^r = r\log_a n$$

Si sustituimos r por $\frac{1}{m}$ obtenemos para $m \in \mathbb{Z} \wedge m \neq 0$:

[ ]

$\log_a n^{1/m} = \frac{1}{m} \log_a n$

206

$$\log_a n^{1/m} = \frac{1}{m} \log_a n$$

Si sustituimos $n^{1/m}$

por su equivalente $\sqrt[m]{n}$:

$$\log_a \sqrt[m]{n} = \frac{1}{m} \log_a n$$

207

$$\log_a n^r = r \log_a n$$

$$\log_a n^{1/m} = \frac{1}{m} \log_a n$$

$$\boxed{\log_a \sqrt[m]{n} = \frac{\log_a n}{m}}$$

208

Propiedad 4

"El logaritmo de un radical es igual al logaritmo del radicando dividido entre el índice."

$$\boxed{\log_a \sqrt[m]{n} = \frac{\log_a n}{m}}$$

209

Resumen de las
propiedades de los logaritmos:

1. $\log_a nm = \log_a n + \log_a m$
2. $\log_a n/m = \log_a n - \log_a m$
3. $\log_a n^m = m \log_a n$
4. $\log_a \sqrt[m]{n} = \frac{\log_a n}{m}$

para los casos en que las expresiones estén definidas en $\mathcal{R}$.

2.10.5

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *deducir* las propiedades siguientes de los logaritmos:

  $\log_a nm = \log_a n + \log_a m$

  $\log_a n/m = \log_a n - \log_a m$

  $\log_a n^m = m \log_a n$

  $\log_a \sqrt[m]{n} = \frac{1}{m} \log_a n$

10.6

Propiedades de los logaritmos (aplicación)

210

Propiedades de los logaritmos:

1. $\log_a nm = \log_a n + \log_a m$
2. $\log_a n/m = \log_a n - \log_a m$
3. $\log_a n^m = m \log_a n$
4. $\log_a \sqrt[m]{n} = \frac{\log_a n}{m}$

211

Estudiar con atención
los cuadros siguientes,
en los que aplicaremos las

propiedades de los logaritmos

en la ejecución de algunas
operaciones sencillas.

212

Queremos calcular por logaritmos:

$14.75 \times 3.06 \doteq$ [?]

Por la propiedad 1:

$\log(14.75 \times 3.06) \doteq \log 14.75 + \log 3.06$

$\log 14.75 \doteq$ [ ]

$\log\ 3.06 \doteq$ [ ]

$\log 14.75 + \log 3.06 \doteq$ [ ]

$14.75 \times 3.06 \doteq \text{antilog}$ [ ] $\doteq$ [ ]

Podemos comprobar el resultado mostrado en el cuadro siguiente efectuando aritméticamente la operación o por medio de una calculadora.

Por la propiedad 1:

$14.75 \times 3.06 \doteq$ [?]

$\log(14.75 \times 3.06) \doteq \log 14.75 + \log 3.06$

$\log 14.75 \doteq 1.16879202$

$\log 3.06 \doteq 0.48572143$

$\log 14.75 + \log 3.06 \doteq 1.65451345$

$14.75 \times 3.06 \doteq \text{antilog } 1.65451345 \doteq$ [45.135]

213

Una división sencilla.

$425/32 \doteq$ [?]

Por la propiedad 2:

$\log 425/32 \doteq$ [ ]

$\log 425 - \log 32$

214

$425/32 \doteq$?

Por la propiedad 2:

$\log(425/32) \doteq \log 425 - \log 32$

$\log 425 \doteq$ ____

$\log 32 \doteq$ ____

$\log 425 - \log 32 \doteq$ ____

$425/32 \doteq \text{antilog}$ ____ $\doteq$ ____

Respuesta en el cuadro siguiente

$425/32 \doteq$?

Por la propiedad 2:

$\log(425/32) \doteq \log 425 - \log 32$

$\log 425 \doteq 2.62838893$

$\log 32 \doteq 1.50514998$

$\log 425 - \log 32 \doteq 1.12323895$

$425/32 \doteq \text{antilog } 1.12323895 \doteq \boxed{13.28125}$

215

Cálculo de una potencia.

$13.07^5 \doteq$?

Por la propiedad ____

$\log 13.07^5 \doteq$ ____

3

$5 \log 13.07$

216

$13.07^5 =$?

Por la propiedad 3:

$\log 13.07^5 \doteq 5 \log 13.07 \doteq$ _____

$\log 13.07 \doteq$ _____

$13.07^5 \doteq \text{antilog}$ _____ $\doteq$ _____

Respuesta en el cuadro siguiente

$13.07^5 =$?

Por la propiedad 3:

$\log 13.07^5 \doteq 5 \log 13.07 \doteq 5.58137795$

$\log 13.07 \doteq 1.11627559$

$13.07^5 \doteq \text{antilog } 5.58137795 \doteq$ 381 397.59

217

Una raíz.

$\sqrt{2} \doteq$?

Por la propiedad ____

_____

4

$\log \sqrt{2} \doteq \dfrac{\log 2}{2}$

218

Por la propiedad 4:

$\sqrt{2} \doteq$?

$\log\sqrt{2} \doteq \log 2/2$

$\log 2 \doteq$ _____

$\log 2/2 \doteq$ _____

$\sqrt{2} \doteq \text{antilog}$ _____ $\doteq$ _____

Respuesta
en el
cuadro siguiente

Por la propiedad 4:

$\sqrt{2} \doteq$?

$\log\sqrt{2} \doteq \log 2/2$

$\log 2 \doteq 0.301029995$

$\log 2/2 \doteq 0.150514997$

$\sqrt{2} \doteq \text{antilog } 0.150514997 \doteq \boxed{1.41421356}$

219

El cociente de un producto
y un número.

$$\frac{58.3 \times 19.03}{6.17} \doteq \text{?}$$

"Tomando logaritmos":

_____

Respuesta
en el
cuadro siguiente

220

$$\frac{58.3 \times 19.03}{6.17} \doteq \boxed{\quad ? \quad}$$

$$\log \frac{58.3 \times 19.03}{6.17} \doteq \underbrace{\log(58.3 \times 19.03)} - \log 6.17$$

$$\doteq \log 58.3 + \log 19.03 - \log 6.17$$

$$\begin{array}{rl} \oplus & \log\ 58.3 \doteq \underline{\qquad\qquad} \\ & \log 19.03 \doteq \underline{\qquad\qquad} \\ \ominus & \log\ 6.17 \doteq \underline{\qquad\qquad} \\ \hline \end{array}$$

$$\log \frac{58.3 \times 19.03}{6.17} \doteq \underline{\qquad\qquad}$$

antilog $\underline{\qquad\qquad} \doteq \underline{\qquad\qquad}$

Respuesta
en el
cuadro siguiente

$$\frac{58.3 \times 19.03}{6.17} = \boxed{\quad ? \quad}$$

$$\log \frac{58.3 \times 19.03}{6.17} \doteq \log(58.3 \times 19.03) - \log 6.17$$

$$\doteq \log 58.3 + \log 19.03 - \log 6.17$$

$$\begin{array}{rl} \oplus & \log 58.3 \doteq 1.765668555 \\ & \log 19.03 \doteq 1.279438788 \\ \ominus & \log\ 6.17 \doteq 0.790285164 \\ \hline \end{array}$$

$$\log \frac{58.3 \times 19.03}{6.17} \doteq 2.254822179$$

antilog $2.254822179 \doteq \boxed{179.8134522}$

221

Un cociente de productos.

$$A = \frac{14.06 \times 12.76}{3.14 \times 2.05} \doteq \boxed{\quad ? \quad}$$

"Tomando logaritmos":

$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$

Respuesta
en el
cuadro siguiente

222

$$A = \frac{14.06 \times 12.76}{3.14 \times 2.05} \doteq \boxed{\quad ? \quad}$$

$$\log \frac{14.06 \times 12.76}{3.14 \times 2.05} \doteq \log(14.06 \times 12.76) - \log(3.14 \times 2.05)$$

$$\doteq \log 14.06 + \log 12.76 - (\log 3.14 + \log 2.05)$$

$$\doteq \log 14.06 + \log 12.76 - \log 3.14 - \log 2.05$$

$\log 14.06 \doteq$ ⌊ ⌋

$\log 12.76 \doteq$ ⌊ ⌋

$\log \ 3.14 \doteq$ ⌊ ⌋

$\log \ 2.05 \doteq$ ⌊ ⌋

$\log \ A \doteq$ ⌊ ⌋

• $A \doteq$ antilog ⌊ ⌋ $\doteq$ ⌊ ⌋

Respuesta
en el
cuadro siguiente

$$A = \frac{14.06 \times 12.76}{3.14 \times 2.05} \doteq \boxed{\quad ? \quad}$$

$$\log \frac{14.06 \times 12.76}{3.14 \times 2.05} \doteq \log(14.06 \times 12.76) - \left[\log(3.14 \times 2.05)\right]$$

$$\doteq \log 14.06 + \log 12.76 - (\log 3.14 + \log 2.05)$$

$$\doteq \log 14.06 + \log 12.76 - \log 3.14 - \log 2.05$$

$\log 14.06 \doteq 1.147985321$

$\log 12.76 \doteq 1.105850674$

$\log \ 3.14 \doteq 0.496929648$

$\log \ 2.05 \doteq 0.311753861$

$\log \ A \doteq 1.445152486$

• $A \doteq$ antilog $1.445152486 \doteq \boxed{27.8709958}$

223

Un producto de potencias.

$$B = 5^4 \times 0.35^3$$

"Tomando logaritmos":

⌊ ⌋

Respuesta
en el
cuadro siguiente

224

$B = 5^4 \times 0.35^3 \doteq$?

$\log(5^4 \times 0.35^3) \doteq \log 5^4 + \log 0.35^3$

$\doteq 4 \log 5 + 3 \log 0.35$

$\log 5 \doteq$ ____

$4 \log 5 \doteq$ ____

$\log 0.35 \doteq$ ____

$3 \log 0.35 \doteq$ ____

$\log B \doteq$ ____

• $B \doteq$ antilog ____ $\doteq$ ____

Respuesta en el cuadro siguiente

$B = 5^4 \times 0.35^3 \doteq$?

$\log(5^4 \times 0.35^3) \doteq \log 5^4 + \log 0.35^3$

$\doteq 4 \log 5 + 3 \log 0.35$

$\log 5 \doteq 0.698970004$

$4 \log 5 \doteq 2.795880017$

$\log 0.35 \doteq -0.455931955$

$3 \log 0.35 \doteq -1.367795867$

$\log B \doteq 1.42808415$

• $B \doteq$ antilog $1.42808415 \doteq$ 26.79687497

225

Un producto de potencias con exponentes fraccionarios.

$$C = 8^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{4}}$$

"Tomando logaritmos":

____

Respuesta en el cuadro siguiente

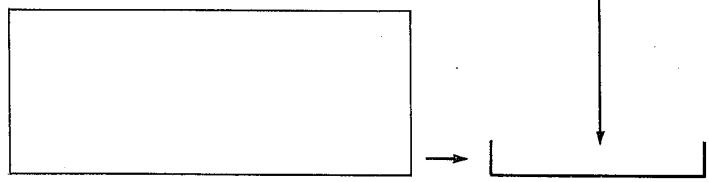
226

$$C = 8^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} \doteq \boxed{?}$$

$$\log\left(8^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{4}}\right) \doteq \log 8^{\frac{2}{3}} + \log 5^{\frac{1}{4}}$$

$$\doteq \frac{2}{3} \log 8 + \frac{1}{4} \log 5$$

Completar la operación.



Respuesta
en el
cuadro siguiente

$$C = 8^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} \doteq \boxed{?}$$

$$\log\left(8^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{4}}\right) \doteq \log 8^{\frac{2}{3}} + \log 5^{\frac{1}{4}}$$

$$\doteq \frac{2}{3} \log 8 + \frac{1}{4} \log 5$$

$$\log 8 \doteq 0.903089987$$

$$\frac{2}{3} \log 8 \doteq 0.602059991$$

$$\oplus \quad \log 5 \doteq 0.698970004$$

$$\frac{1}{4} \log 5 \doteq 0.174742501$$

$$\log C \doteq 0.776802492$$

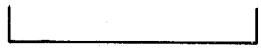
- $C \doteq \text{antilog } 0.776802492 \doteq \boxed{5.98139512}$

227

Un cociente de potencias.

$$D = \frac{0.54^{-7}}{0.03^{3}}$$

"Tomando logaritmos":



Respuesta
en el
cuadro siguiente

Estudiar con mucha atención.

$$D \doteq \frac{0.54^{-7}}{0.03^3} \doteq \boxed{\ ?\ }$$

$$\log \frac{0.54^{-7}}{0.03^3} \doteq \log 0.54^{-7} - \log 0.03^3$$

$$\doteq -7 \log 0.54 - 3 \log 0.03$$

$$\log 0.54 \doteq -0.26760624$$

$$-7 \log 0.54 \doteq 1.87324368$$

$$\log 0.03 \doteq -1.52287874$$

$$3 \log 0.03 \doteq -4.56863622$$

$$\log D \doteq 6.44187990$$

$$D \doteq \text{antilog } 6.44187990 \doteq \boxed{2\,766\,176.58}$$

228

Una raíz de índice no usual.

$$E = \sqrt[7]{24}$$

"Tomando logaritmos":

Respuesta en el cuadro siguiente

229

$$E = \sqrt[7]{24} = \boxed{\ ?\ }$$

$$\log \sqrt[7]{24} = \frac{\log 24}{7}$$

Completar la operación.

Respuesta en el cuadro siguiente

$$E \doteq \sqrt[7]{24} \doteq \boxed{?}$$

$$\log \sqrt[7]{24} \doteq \frac{\log 24}{7}$$

$$\log 24 \doteq 1.380211242$$

$$\log E \doteq \frac{1.380211242}{7} \doteq 0.197173034$$

$$E \doteq \text{antilog } 0.197173034 \doteq \boxed{1.574610106}$$

230

La raíz de un producto:

$$F = \sqrt[3]{0.05 \times 7.18}$$

"Tomando logaritmos":

[ ]

Respuesta en el cuadro siguiente

231

$$F \doteq \sqrt[3]{0.05 \times 7.18} \doteq \boxed{?}$$

$$\log \sqrt[3]{0.05 \times 7.18} \doteq \frac{\log(0.05 \times 7.18)}{3}$$

$$\doteq \frac{\log 0.05 + \log 7.18}{3}$$

Completar.

[ ] → [ ]

Respuesta en el cuadro siguiente

$$F = \sqrt[3]{0.05 \times 7.18} \doteq \boxed{\quad ? \quad}$$

$$\log \sqrt[3]{0.05 \times 7.18} \doteq \frac{\log 0.05 + \log 7.18}{3}$$

$$\log 0.05 \doteq -1.301029996$$

$$\oplus \quad \log 7.18 \doteq \quad 0.856124444$$

$$-0.444905552$$

$$\log F \doteq -0.14830185$$

$$F \doteq \text{antilog} -0.14830185 \doteq \boxed{0.710719366}$$

232

Cociente de dos productos que contienen potencias y raíces.

$$G = \frac{12.8 \times 3.4^3}{\sqrt[3]{8.5} \times 0.012}$$

"Tomando logaritmos":

Respuesta en el cuadro siguiente

233

$$G = \frac{12.8 \times 3.4^3}{\sqrt[3]{8.5} \times 0.012} \doteq \boxed{\quad ? \quad}$$

$$\log \frac{12.8 \times 3.4^3}{\sqrt[3]{8.5} \times 0.012} \doteq \log(12.8 \times 3.4^3) - \log(\sqrt[3]{8.5} \times 0.012)$$

$$\doteq \log 12.8 + \log 3.4^3 - (\log \sqrt[3]{8.5} + \log 0.012)$$

$$\doteq \log 12.8 + 3 \log 3.4 - (\frac{1}{3} \log 8.5 + \log 0.012)$$

$$\doteq \log 12.8 + 3 \log 3.4 - \frac{1}{3} \log 8.5 - \log 0.012$$

Completar.

$$\boxed{\quad} \doteq \boxed{\quad}$$

Respuesta en el cuadro siguiente

$$G = \frac{12.8 \times 3.4^3}{\sqrt[3]{8.5} \times 0.012} \doteq \boxed{}$$

$$\log G \doteq \log 12.8 + 3 \log 3.4 - \frac{1}{3} \log 8.5 - \log 0.012$$

$\log 12.8 \doteq 1.10720997$

$\log 3.4 \doteq 0.53147892$

$3 \log 3.4 \doteq 1.59443676$

$\log 8.5 \doteq 0.92941893$

$\frac{1}{3} \log 8.5 \doteq 0.30980631$

$\log 0.012 \doteq -1.92081875$

$\log G \doteq 4.31265917$

$G \doteq \text{antilog } 4.31265917 \doteq \boxed{20\,542.77786}$

2.10.6.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

234

A veces se requiere
determinar,
a partir del logaritmo de un número
en una base dada,
el **logaritmo** de ese número
en otra base.

235

Por ejemplo,
a partir del **logaritmo común** (decimal) de 27:

$$\log 27 \doteq 1.431363764$$

queremos conocer el **logaritmo natural** de 27:

$$\ln 27 = \boxed{\ ?\ }$$

236

Vamos a desarrollar una expresión para efectuar este **"cambio de base".**

237

$$y = \log_a x$$

Expresión exponencial equivalente:

$$\downarrow$$

$$\boxed{\qquad}$$

$a^y = x$

238

$y = \log_a x$

$a^y = x$

Tomando $\log_b$ de ambos miembros, obtenemos:

↓

$\log_b a^y = \log_b x$

puesto que $\begin{cases} \text{si } m = n \\ \log_b m = \log_b n \end{cases}$

239

$y = \log_a x$

$a^y = x$

$\log_b a^y = \log_b x$

Al aplicar la propiedad 3 de los logaritmos, obtenemos:

$y \log_b a = \log_b x$

240

$y \log_b a = \log_b x$

Despejando y:

↓

$$y = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

241

$$y = \log_a x$$
$$a^y = x$$
$$\log_b a^y = \log_b x$$
$$y \log_b a = \log_b x$$
$$y = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Al sustituir **y** por su equivalente, obtenemos:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

242

$$y = \log_a x$$
$$a^y = x$$
$$\log_b a^y = \log_b x$$
$$y \log_b a = \log_b x$$
$$y = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Aquí tenemos el procedimiento completo para la deducción de esta fórmula

$$\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}$$

243

$$\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}$$

Por medio de esta expresión podemos determinar para un numero dado **(x)** su logaritmo en base (a) si conocemos su logaritmo en base (b)

244

Ejemplo:

$\log 27 \quad 1.431363764$

$$\ln 27 \doteq \frac{\log 27}{\log e}$$

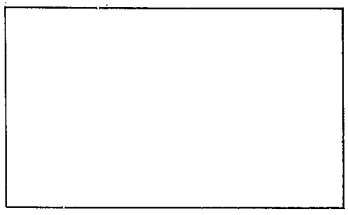
$$\log e \doteq \log 2.718281828 \doteq 0.434294482$$

$$\ln 27 \doteq \frac{1.431363764}{0.434294482} \doteq 3.295836864$$

245

Calcular:

$\log_2 32$



empleando la expresión:

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$$

$\log 32 \doteq 1.505149978$
$\log 2 \doteq 0.301029995$

$$\log_2 32 \doteq \frac{1.505149978}{0.301029996} = 5$$

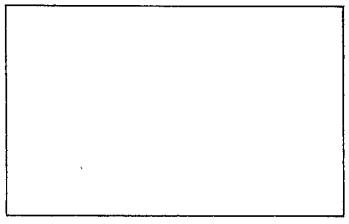
En efecto:

$2^5 = 32$

246

Calcular:

$\log_4 64$



empleando la expresión:

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$$

$\log 64 \doteq 1.806179974$
$\log 4 = 0.602059991$

$$\log_4 64 \doteq \frac{1.806179974}{0.602059991} = 3$$

En efecto:

$4^3 = 64$

2.10.6.2

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

2.10.6

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *aplicar* las propiedades de los logaritmos a operaciones de multiplicación, división, potenciación y radicación, solas o en diversas combinaciones;
- *deducir* la expresión: $\log_a x = \log_b x/\log_b a$ para la determinación del logaritmo de un número en una base dada a partir del logaritmo del número en otra base;
- *aplicar* la expresión: $\log_a x = \log_b x/\log_b a$.

10.7

Ecuaciones exponenciales

247

Se requiere resolver:

$$7^x = 8$$

$x \in \mathbb{R}$

248

$7^x = 8 \qquad x \in \mathbb{R}$

"Tomar logaritmos"
(por ejemplo, decimales)
de ambos miembros
de la ecuación:

$\log 7^x = \log 8$

249

$$7^x = 8$$
$$\log 7^x = \log 8$$

Aplicar la propiedad 3 de los logaritmos al primer miembro:

$$\square$$

$x \log 7 = \log 8$

250

$$7^x = 8$$
$$\log 7^x = \log 8$$
$$x \log 7 = \log 8$$

Despejar:

$$x = \square$$

$\dfrac{\log 8}{\log 7}$

251

$$7^x = 8$$
$$\log 7^x = \log 8$$
$$x \log 7 = \log 8$$
$$x = \frac{\log 8}{\log 7}$$

$$x \doteq \frac{\square}{\square} \doteq \square$$

- $\dfrac{0.903089987}{0.84509804}$
- 1.068621561

252

Estudiar con atención el procedimiento completo.

$$7^x = 8$$

$$\log 7^x = \log 8$$

$$x \log 7 = \log 8$$

$$x = \frac{\log 8}{\log 7}$$

$$x \doteq \frac{0.903089987}{0.84509804} \doteq 1.068621561$$

- Comprobación:

$$7^{1.068621561} \doteq 8$$

- Conjunto solución:

$$S = \{ x/x \in \mathbb{R} \wedge 7^x = 8 \} = \{ 1.068\ldots \}$$

*Esto puede ser verificado por medio de una calculadora de las llamadas "científicas"

253

Resolver:

$$25^x = 10 \qquad x \in \mathbb{R}$$

- $x \doteq$ ____

- $\log 25^x = \log 10$
  $x \log 25 = \log 10$
  $$x = \frac{\log 10}{\log 25}$$
  $$x \doteq \frac{1}{1.39794001}$$

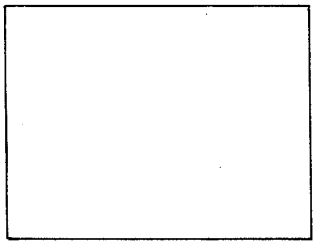
- $x \doteq 0.715338278$

  $25^{0.715338278} \doteq 10$

254

Resolver:

$5.6^x = 7.8 \qquad x \in \mathbb{R}$



- $x \doteq$ ____

- $\log 5.6^x = \log 7.8$

  $x \log 5.6 = \log 7.8$

  $$x = \frac{\log 7.8}{\log 5.6}$$

  $$x \doteq \frac{0.892094603}{0.748188027}$$

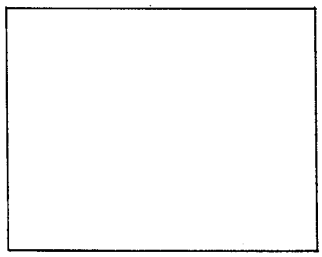
- $x \doteq 1.192340121$

  $5.6^{1.192340121} \doteq 7.8$

255

Resolver:

$0.03^{-x} = 1.05 \qquad x \in \mathbb{R}$



- $x =$ ____

- $\log 0.03^{-x} = \log 1.05$

  $-x \log 0.03 = \log 1.05$

  $$-x = \frac{\log 1.05}{\log 0.03}$$

  $$x = -\frac{\log 1.05}{\log 0.03}$$

  $$x \doteq -\frac{0.021189299}{-1.522878745}$$

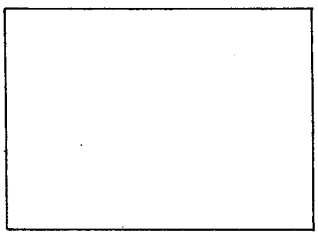
- $x \doteq 0.013913976$

  $0.03^{-.013913976} \doteq 1.05$

256

Resolver:

$5^{x+1} = 12^{x-1} \qquad x \in \mathbb{R}$



- $x \doteq$ ____

- $\log 5^{x+1} = \log 12^{x-1}$

  $(x+1) \log 5 = (x-1) \log 12$

  $x \log 5 + \log 5 = x \log 12 - \log 12$

  $x \log 5 - x \log 12 = -\log 12 - \log 5$

  $x (\log 5 - \log 12) = -\log 12 - \log 5$

  $$x = \frac{-(\log 12 + \log 5)}{\log 5 - \log 12}$$

- $$x = \frac{\log 12 + \log 5}{\log 12 - \log 5} \doteq 4.676745591$$

  (comprobación en el cuadro siguiente)

257

- Comprobación:

$$5^{5.676745591} = 12^{3.676745591}$$

$$9286.98813 \doteq 9286.98808$$

▲
PCV

- Conjunto solución:

$$S = \{ x/x \in \mathbb{R} \wedge 5^{x+1} = 12^{x-1} \} = \{ 4.676 \}$$

258

Resolver:

$$3 + 2^x = 5 \qquad x \in \mathbb{R}$$

- $x \doteq$ ____

- $2^x = 5 - 3 = 2$

  $2^x = 2$

  $\log 2^x = \log 2$

  $x \log 2 = \log 2$

  $x = \frac{\log 2}{\log 2}$

- $x = 1$

  $3 + 2^1 = 5$

259

Resolver:

$$x^{\frac{2}{3}} = 13 \qquad x \in \mathbb{R}$$

- $x \doteq$ ____

- $\log x^{2/3} = \log 13$

  $\frac{2}{3} \log x = \log 13$

  $\log x = \frac{3}{2} \log 13$

  $\log x \doteq \frac{3}{2} \cdot 1.113943352$

  $\log x \doteq 1.670915028$

  $x \doteq \text{antilog } 1.670915028$

- $x \doteq 46.87216656$

  (comprobación en el cuadro siguiente)

260

- Comprobación:

$$(46.87216656)^{2/3} = 13$$

$$13 = 13$$

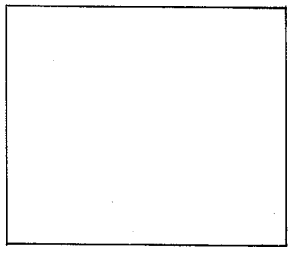
- Conjunto solución:

$$S = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x^{2/3} = 13\} = \{46.872...\}$$

261

Resolver:

$$x^{0.125} = 8 \qquad x \in \mathbb{R}^+$$



- $x \doteq$ _____

- $\log x^{0.125} = \log 8$

$0.125 \log x = \log 8$

$$\log x = \frac{\log 8}{0.125}$$

$$\log x \doteq \frac{0.903089987}{0.125}$$

$\log x \doteq 7.224719$

- $x \doteq 16777216.01$

(comprobación en el cuadro siguiente)

262

- Comprobación:

$$(16\,777\,216.01)^{0.125} = 8$$

$$8 = 8$$

▲

PCV

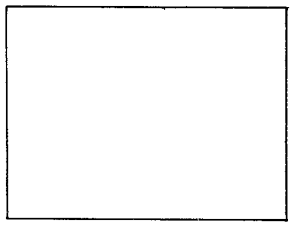
- Conjunto solución:

$$S = \{x/x \in \mathbb{R}^+ \wedge x^{0.125} = 8\} = \{16\,777\,216\}$$

263

Resolver:

$5x^{-3/5} = 8 \qquad x \in \mathbb{R}^+$



- $x \doteq$ ____

- $\log 5x^{-3/5} = \log 8$

$\log 5 + \log x^{-3/5} = \log 8$

$\log 5 - \frac{3}{5} \log x = \log 8$

$-\frac{3}{5} \log x = \log 8 - \log 5$

$\frac{3}{5} \log x = \log 5 - \log 8$

$\log x = \frac{5}{3} (\log 5 - \log 8)$

$\log x \doteq -0.340199971$

$x \doteq \text{antilog} -0.340199971$

$x \doteq 0.456877771$

- (comprobación en el cuadro siguiente)

264

- Comprobación:

$5(0.456877771)^{-\frac{3}{5}} = 8$

$5 \times 1.6 = 8$

$8 = 8 \blacktriangleleft$ PCV

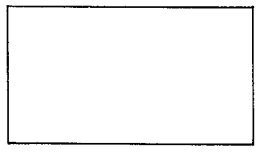
- Conjunto solución:

$S = \{ x/x \in \mathbb{R}^+ \quad 5x^{-3/5} = 8 \} = \{ 0.456\ldots \}$

265

Resolver:

$3^x + 4 = 0 \qquad x \in \mathbb{R}$



- $x \doteq$ ____

- $3^x = -4$

- $\log 3^x = \log (-4)$

pero no hemos definido logaritmos de números negativos

266

La ecuación

$$3^x + 4 = 0$$

no tiene solución en $\mathcal{R}$.

- $S = \{x/x \in \mathcal{R} \wedge 3^x + 4 = 0\} = \phi$

2.10.7.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

2.10.7

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *resolver* ecuaciones exponenciales sencillas.

10.8

Ecuaciones logarítmicas

267

Se requiere resolver:

$$\log (x + 1) = \log 5$$

$\underbrace{x \in \mathbb{R} \wedge x > -1}$

¿Por qué?

Respuesta en el cuadro siguiente

Para que

$$\log (x + 1)$$

esté definido se requiere que

$$x + 1 > 0 \quad \text{ó} \quad x > -1$$

porque si $x = -1$

$$\log 0 = \log 5 \blacktriangleleft \text{PCF}$$

o si $x = -2$

$$\log (-2 + 1) = \log 5$$

$$\log(-1) = \log 5 \blacktriangleleft \text{PCF}$$

Además, $\log(-1)$ no está definido.

268

$$\log (x + 1) = \log 5$$
$$x \in \mathbb{R} \wedge x > -1$$

Sabemos que:

si $\log_a n = \log_a m$

entonces [ ]

Por lo tanto,
para nuestro caso:

[ ]

$n = m$

$x + 1 = 5$

269

$$\log (x + 1) = \log 5$$

$$x + 1 = 5$$

$$x = [\ ]$$

4

$4 \in \mathbb{R} \wedge 4 > -1$

(comprobación y conjunto solución en el cuadro siguiente)

270

- Comprobación:

$$\log (x + 1) = \log 5$$

$$\log (4 + 1) = \log 5$$

$$\log 5 = \log 5$$

▲
PCV

- Conjunto solución:

$$S = \{ x/x \in \mathbb{R} \wedge x > -1 \wedge \log (x + 1) = \log 5 \} = \{ 4 \}$$

271

Resolver:

$$\log (2x - 1) = \log (x + 2)$$
$$x \in \mathbb{R} \wedge x > \frac{1}{2}$$

- $x =$

- $2x - 1 = x + 2$
  $2x - x = 2 + 1$
- $x = 3$

$3 \in \mathbb{R} \wedge 3 > \frac{1}{2}$

(comprobación y conjunto solución en el cuadro siguiente)

272

- Comprobación:

$$\log (2x - 1) = \log (x + 2)$$
$$\log (2 \cdot 3 - 1) = \log (3 + 2)$$
$$\log (6 - 1) = \log 5$$
$$\log 5 = \log 5 \blacktriangleleft \text{ PCV}$$

- Conjunto solución:

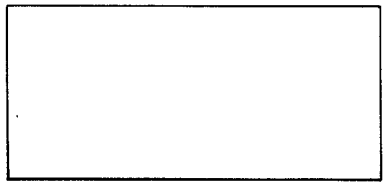
$$S = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x > \frac{1}{2} \wedge \log (2x - 1) = \log (x + 2)\} = \{3\}$$

273

Para resolver

$$\log (x + 3) + \log (2x - 1) = \log 4$$
$$x \in \mathbb{R} \wedge x > \frac{1}{2}$$

intentaremos transformar la ecuación dada en otra equivalente de la forma $\log n = \log m$:



Aplicando la propiedad 1 de los logaritmos al primer miembro:

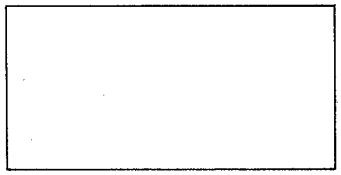
$$\log [(x + 3) (2x - 1)] = \log 4$$

274

$$\log (x + 3) + \log (2x - 1) = \log 4$$

$$\log \left[(x + 3)(2x - 1)\right] = \log 4$$

Completar la solución:



- $x =$

- $(x+3)(2x-1)=4$
  $2x^2+5x-3=4$
  $2x^2+5x-3-4=0$
  $2x^2+5x-7=0$

- $x=\dfrac{-5\pm 9}{4}$

$x_1 = 1$

$x_2 = -7/2$

$1 \in \mathbb{R} \wedge 1 > 1/2$

$-7/2 \in \mathbb{R} \wedge -7/2 \not> 1/2$

(comprobación en el cuadro siguiente)

275

- Comprobación:

$$\log (x + 3) + \log (2x - 1) = \log 4$$

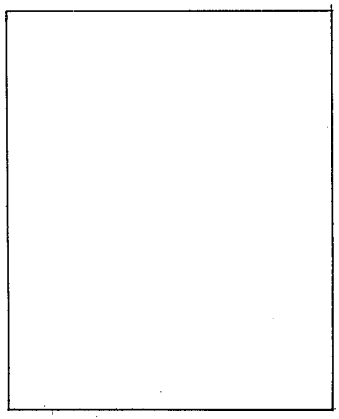
para $x = 1$:

$$\log (1 + 3) + \log (2 \cdot 1 - 1) = \log 4$$
$$\log 4 + \log 1 = \log 4$$
$$\log(4 \times 1) = \log 4$$
$$\log 4 = \log 4$$
$$\blacktriangle$$
PCV

Ver cuadro siguiente.

276

Veamos qué pasa para $x = -7/2$:



$$\log\left(-\frac{7}{2}+3\right)+\log\left[2\left(-\frac{7}{2}\right)-1\right] = \log 4$$

$$\log\left(-\frac{1}{2}\right)+\log(-8)=\log 4$$

Las expresiones

$\log(-1/2)$

y

$\log(-8)$

no están definidas.

$\left(-\frac{7}{2}\right)$ no es solución de la ecuación dada.

(conjunto solución en el cuadro siguiente)

277

$$\log(x+3) + \log(2x-1) = \log 4$$

$$x \in \mathbb{R} \wedge x > \frac{1}{2}$$

- Conjunto solución:

$$S = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge x > \frac{1}{2} \wedge \log(x+3) + \log(2x-1) = \log 4\}$$

$$= \underline{\qquad\qquad}$$

por extensión

$\{1\}$

278

Resolver:

$$\log(x+5) - \log 5 = \log 2$$

$$x \in \mathbb{R} \wedge \underline{\qquad}$$

Ecuación equivalente
de la forma
$\log n = \log m$:

$\underline{\qquad\qquad}$

$x > -5$

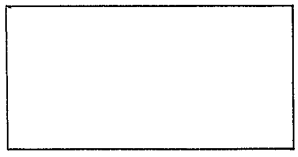
$$\log \frac{x+5}{5} = \log 2$$

279

$$\log(x+5) - \log 5 = \log 2$$

$$\log \frac{x+5}{5} = \log 2$$

Completar la solución:



- $x = \underline{\qquad\qquad}$

- $\frac{x+5}{5} = 2$

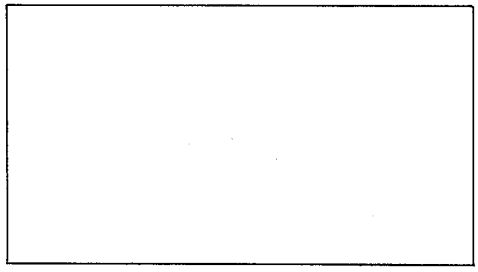
  $x + 5 = 10$

- $x = 5$

  $5 \in \mathbb{R} \wedge 5 > -5$

280

- Comprobación:



- Conjunto solución:

Para $x = 5$:

$\log (5 + 5) - \log 5 = \log 2$

$\log 10 - \log 5 = \log 2$

$\log \frac{10}{5} = \log 2$

$\log 2 = \log 2$

▲

PCV

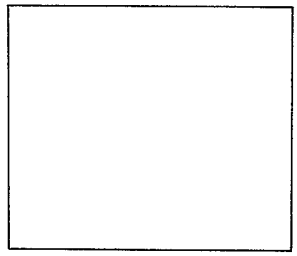
$S = \{x/x \in \mathcal{R} \wedge \log (x + 5) - \log 5 = \log 2\} = \{5\}$

281

Resolver:

$2 \log (x - 3) = \log 25$

$x \in \mathcal{R} \wedge$ ____



$x =$ ____

- $x > 3$
- $\log (x - 3)^2 = \log 25$

$(x - 3)^2 = 25$

$x^2 - 6x + 9 = 25$

$x^2 - 6x - 16 = 0$

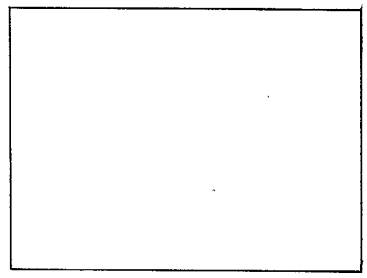
- $x = \frac{6 \pm 10}{2}$

$x_1 = 8 \qquad 8 \in \mathcal{R} \wedge 8 > 3$

$x_2 = -2 \qquad -2 \in \mathcal{R} \wedge -2 \not> 3$

282

- Comprobación:



- Conjunto solución:

- Para $x = 8$:

$2 \log (8 - 3) = \log 25$

$2 \log 5 = \log 25$

$\log 5^2 = \log 25$

$\log 25 = \log 25$

▲

PCV

- Para $x = -2$:

$2 \log (-2 - 3) = \log 25$

$2 \log (-5) = \log 25$

$\log (-5)$ no está definido.

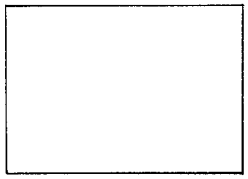
- $S = \{x/x \in \mathcal{R} \wedge x > 3 \wedge 2 \log (x - 3) = \log 25\} = \{8\}$

283

Resolver:

$$\log 8 = \frac{\log x}{2}$$

$x \in \mathbb{R} \wedge$ [ ]

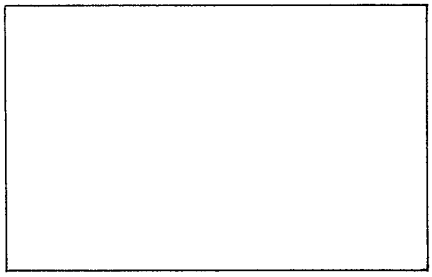


- $x =$ [ ]

- $x > 0$
- $\log 8 = \log \sqrt{x}$
  $8 = \sqrt{x}$
- $x = 64$
  $64 \in \mathbb{R} \wedge 64 > 0$

284

- Comprobación:



- Conjunto solución:

[ ]

$\log 8 = \frac{\log 64}{2}$

$\log 8 = \log \sqrt{64}$

$\log 8 = \log 8$

▲
PCV

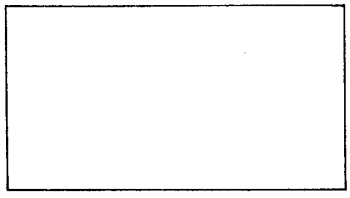
$S = \left\{ x/x \in \mathbb{R} \wedge \log 8 = \frac{\log x}{2} \right\} = \{64\}$

285

Resolver:

$$\log (x + 2) - \log 2x = 0$$

$x \in \mathbb{R} \wedge$ [ ]



- $x =$ [ ]

$x > 0$

$\log \frac{x+2}{2x} = \log 1$

$\frac{x+2}{2x} = 1$

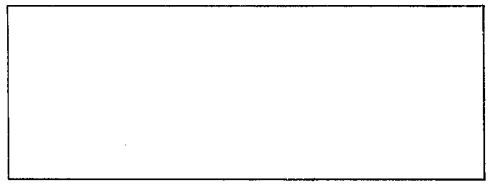
$x + 2 = 2x$

$x = 2$

$2 \in \mathbb{R} \wedge 2 > 0$

286

- Comprobación:



- Conjunto solución:

Para $x = 2$:

$$\log(2+2) - \log(2 \cdot 2) = 0$$

$$\log 4 - \log 4 = 0$$

$$0 = 0$$

PCV

$S = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x > 0 \wedge \log(x+2) - \log 2x = 0\} = \{2\}$

2.10.8.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

287

Consideremos nuevamente
un problema cuya solución
habíamos dejado pendiente
en un módulo anterior.

288

El problema consistía en lo siguiente:

Una institución de ahorro
paga 4% de interés compuesto
capitalizable anualmente.
Si se depositan **25 000 pesos,**
¿qué cantidad se obtiene
al cabo de **1, 2, 3, 4, 5. . . 10 años**?
¿En cuánto tiempo se **duplicará**
el capital invertido?

289

Ya habíamos logrado
deducir la expresión

$$M_n = 25\,000 \times 1.04^n$$

que nos permite calcular
el **monto M_n** al cabo de **n** años.

290

Ahora
estamos capacitados
para responder a la
pregunta:

¿En cuánto tiempo se **duplicará**
el capital invertido?

291

$M_n = 25\,000 \times 1.04^n$

¿En cuánto tiempo se **duplicará** el capital invertido?
El modelo matemático para esta situación es:

$25\,000 \times 1.04^n = 50\,000$

292

Identificamos esta expresión

$25\,000 \times 1.04^n = 50\,000$

como una **ecuación exponencial** que, simplificada, toma este aspecto:

$1.04^n = 2$

293

Resolvamos entonces esta ecuación:

$1.04^n = 2 \qquad n \in \mathbb{R}^+$

$\log 1.04^n = \log 2$
$n \log 1.04 = \log 2$
$n = \dfrac{\log 2}{\log 1.04}$
$n \doteq \dfrac{0.301029995}{0.017033339}$

$n \doteq 17.67$

- $n =$

294

Encontramos que
el capital
inicialmente invertido
se duplicará al cabo de

17.67 años

2.10.8

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *resolver* ecuaciones logarítmicas sencillas.

Esta obra se terminó de imprimir
el día 28 de mayo de 1985,
en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se encuadernó en Ediciones Pegaso, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 4, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO ET KC 100